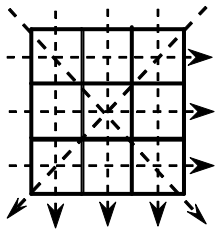
数学サークル 情報誌　第15号(2014.4)

series「数学を楽しもう 中等部編」no.8 解説編

1 正方形のマス目に自然数を並べたとき、右の図のように縦、横、斜めの数字の和がすべて等しいものを魔方陣という。



(1) 次の空欄に自然数を入れて、3×3 の魔方陣を作れ。

(2) 3 × 3 の魔方陣の中央の数は、縦横斜めの和の $\frac{1}{3}$ であることを示せ。

(3) 1 から 9 までの数を使って、3×3 の魔方陣を作れ。

---

(1)

18	20	**13**
12	17	**22**
21	14	**16**

(2)

a	b	c
d	x	e
f	g	h

$\begin{cases} a+x+h=S\cdots① \text{ より、①+②+③とすると} \\ b+x+g=S\cdots② \\ c+x+f=S\cdots③ \end{cases}$

$(a+b+c)+(f+g+h)+3x=3S$

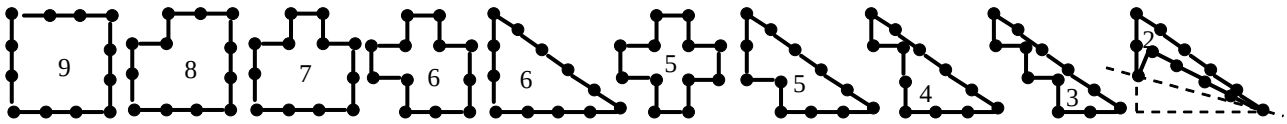
$S+S+3x=3S$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}S$

(3) 解答例

6	**7**	**2**
1	5	**9**
8	**3**	**4**

2 右の図のように、長さ 1 のマッチ棒を 12 本使った正方形がある。マッチ棒をすべて用いて、面積が 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 の図形を作れ。ただし、図形はひと続きのものとする。



【解説】

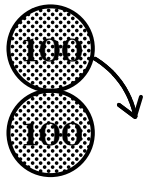
・3+4+5=12 で直角を作る技法は古代文明の時代から利用されていた。この問題でもその魅力が満喫できる。

・この変形過程では折り返す（裏返す）という 3 次元操作を使う場面がある。特に、3 → 2 への展開ではそれが有効に働く。

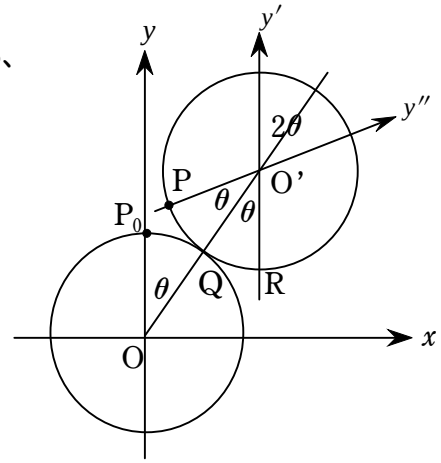
・このような 2 次元から 3 次元へと次元を上げる発想の転換は興味深い。これを使うと、右手を 4 次元に移しひっくり返して戻すと左手になる。

・マッチ棒の移動では、コンパスと定規による作図に加えて、マッチ棒の長さの倍数のみが許されるという制約条件が加わる。

3 100 円玉が 2 枚ある。片方を固定し、他方をその周りで滑らないように転がすとき、何回回転するか。また、それはなぜか。



右の図は、P_0 , P で接していた 100 円玉が転がって、点 Q で接している状態を表している。このとき、$\angle P_0OQ = \theta$ とする。



転がっているので、$\overset{\frown}{P_0Q} = \overset{\frown}{PQ}$ であり、2 円の半径も等しいから、扇形OP_0Q≡扇形O’PQとなる。よって

$\angle P_0OQ = \angle PO'Q = \theta$…①

一方、O’を通るy' 軸はy 軸と平行であるから、錯角の関係から

$\angle QO'R = \angle P_0OQ = \theta$…②

①と②より、転がっている 100 円玉の回転角∠RO’P は

$\angle RO'P = 2\theta$

よって、$\angle P_0OQ$ が 360° のとき、∠RO’P は 720° であり、2 回転している。

【解説】

外側の 100円玉は、内側の 100円玉の円周を 転がっていくが、その円周が丸いので、その分の回転が加算（自転角に公転角が加算）される。