series　高校数学こぼれ話　第９話

鷺谷中学・高等学校
数学科部長　渡邉泰治

■「限りなく○○する」とその行き先はどうなるのか

古代から現代に至るまで、人類の知的探求の一つとして「限りなく○○するとどうなるか」という疑問は常に発せられてきた。たとえば、「地上を限りなくまっすぐ進むとどこへ行くのか」「宇宙を限りなくまっすぐ進むとどこへ行くのか」「物質を限りなく細かくしていったらどうなるのか」「宇宙が限りなく膨張したらどうなるのか」など、枚挙に暇がない。人類はこれらの疑問に挑戦する過程で、様々な発見や新たな概念形成を成し遂げてきた。

数学でも、「自然数 n や実数 x を限りなく大きくすると…」「実数 x を限りなく 0 に近づけると…」「この反復を限りなく繰り返すと…」「この数列を限りなく加えると…」などが議論されてきた。この「限りなく○○する」ときの行き先を大別すると、「有限な値や形あるいは状態に近づく（収束する）」「きりがない（発散する）」「行き先不明（極限なし）」の 3 つになる。

この第 9 話では高校数学のなかで「限りなく○○する」ことでどんな認識や概念が生まれたかをみていこう。

●数を限りなく加えるとどうなるのか

人類史上「限りなく○○する」話題で最も有名なものは、ゼノン（Zeno, 紀元前 490 ― 430 年頃）の逆説の一つである「アキレスと亀の競争」ではないか。

> ギリシア神話の英雄アキレスと亀が 100m競走をすることになった。しかし、アキレスの方が速いことは明らかなので亀がハンディキャップをもらって、いくらか進んだ地点（中間点） A から出発することになった。
>
> 出発後、アキレスが地点 A に達したときには、亀はアキレスが A に達するまでの時間分だけ先に進んで、地点 B にいる。次にアキレスが B に達したときには、亀はまたその時間分だけ先へ進み、地点 C にいる。同様に、アキレスが C に達したときには、亀はさらにその先にいる。
>
> 
>
> A　BC
>
> この状況はいつまでも続き、したがって、いつまでたってもアキレスは亀に追つけない。

この議論の矛盾点はなんだろうか。具体的な数値で現象を追ってみよう。

アキレスと亀の速度を 10m/秒, 1m/秒（亀としては驚異的な速さ！）とする。アキレスが A に達するまでの時間は 5 秒、その間に亀は 5 m 進む。次に、アキレスが B に達するまでの時間は 0.5秒、その間に亀は 0.5 m 進む。さらに、アキレスが C に達するまでの時間は 0.05 秒であり、その間に亀は 0.05m 進む。同様の状況が限りなく繰り返されて、アキレスは亀の位置に達するまでの時間の合計は、$5+0.5+0.05+0.005+\cdots$ 秒 … ① となる。

ゼノンの主張は、「 ① は限りなく数値が足されていくので、その和は無限に大きくなる。従って、追いつくには無限の時間がかかり、結局追いつけない。」ということである。

ここで ① をよくみると、$5+0.5+0.05+0.005+\cdots = 5.5555\cdots = \dfrac{50}{9}$ であり、有限な値である。つまり、$\dfrac{50}{9}$ 秒後にアキレスは亀に追いつくことを示している。

ゼノンの主張に対して彼の弟子のひとりが「実際に走ってみれば追い越せる」と答えたが、ゼノンは論理で立証する、つまり無限に足していく定義を明確にすることを求めた。人類はこれに対して約二千年間挑み続けてたが、17, 18 世紀頃に完成した「無限を扱う手法」により「限りなく数を加えても有限な値を超えない場合もある」ことを理解した。

数列の無限項の和を無限級数（以下、級数）という。①の無限小数も級数であるが、他の興味深い数例を挙げよう。

$0.999\cdots = 0.9+0.09+0.009+\cdots = 1$（こぼれ話 第 2 話参照）

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots = 2$ …②（図 1）

$3.1415\cdots = 3+1\times 0.1+4\times 0.01+1\times 0.001+5\times 0.0001+\cdots = \pi$

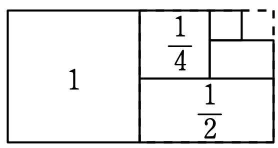

図 1：②の図形による解釈

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$ （自然対数の底、ネイピア数）

これらの級数はそれぞれ有限な値である。このような状態を収束するという。収束するか発散するかの判定は難しい。これが人類を約二千年間悩ましてきた。

●発散する級数は何の役に立つのか

発散する級数として最も人気が高いのは調和級数であろう。調和級数とは

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

のことである。この級数は足される数が 0 に近づくので収束しそうに思われるが、発散する。高校数学Ⅲでは、この証明を 2 通りの方法で学ぶ。その一つを次に示そう（もう一つは、 $y=\frac{1}{x}$ における区分求積法の利用）。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

調和級数が発散することにより、日常よくある疑問の一つ「積み木をせり出して重ねるとき、どこまでせり出させることが可能か」に思いがけず答えることができる。やってみよう（図 2）。

長さ 1 の積み木を理想的な限界状態で重ねるとする。2 枚を重ねるとき、上の積み木の重心が中点A にあるので最大 $\frac{1}{2}$ だけせり出させることができる。この状態の 2 枚を 3 枚目の上に重ねる。このとき、2 枚の積み木の重心は AB の中点にくるので最大 $\frac{1}{4}$ だけせり出させることができる。さらに、この状態の 3 枚を4 枚目の上に重ねる。このとき、3 枚の積み木の重心は CD の 1：2 の内分点E にくるので、最大 $\frac{1}{6}$ だけせり出させることができる。同様にして、せり出すことが可能な長さは

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=\infty$$

となり、どこまででもせり出させることが可能である。

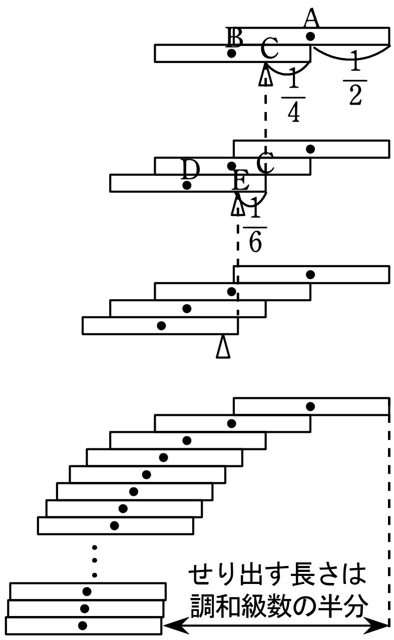

図 2：積み木のせり出し

●数列や関数の行き先はどこか

数列や関数の行き先は、$\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{x\to\infty} f(x)$ で表される。高校で重要なものは、無限等比級数 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}$ の収束発散の議論、e の定義である $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 、高校段階では判定し難い $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$，$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ などがある。

また、$x\to 0$ や $\varDelta x\to 0$ のときの関数の行き先も重要である。特に、微分の定義である $f'(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$ は人類史上の大いなる遺産である。また、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ や $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ も輝かしい。前者はラジアン単位の導入により 1 となるから $(\sin x)'=1\times\cos x$ であり、後者はこの定義から $(e^x)'=e^x$ となり、微分積分が簡潔にできる。

以上、数学における「限りなく〇〇する」議論は人類の認識を広げたり、新たな概念を構築したりすることで、現代文明を進展させてきた。これからも、「限りなく〇〇する」という議論自体「限りなく続く」。