series　高校数学こぼれ話　第７話

鶯谷中学・高等学校
数学科部長　渡邉泰治

■どうしてa^0は１なのか

「どうして a^0 は１になるのですか。」　これは数学を学ぶ際に多くの高校生が抱く疑問であり、質問してくる生徒が絶えない。この疑問は数学を深く理解する入口であり、大いに歓迎する。というのは、これには数学の考え方の本質のひとつが潜んでおり、示唆に富む話題であるからだ。結論を言うと、「a^0 は１になるのではなく、１とする（定義する）」のであり、ここに数学の考え方の本質がある。第７話では、このような定義に係わる例を挙げ、数学の本質に迫ろう。

● a^0 は１と定義する

2^0 について考えてみよう。次の文章はそれを説明している。

> 指数は、たとえば $2^3=2\times2\times2$ であるように、掛ける個数を肩に記述する記法である。この意味からすると、2^0 は定義できない意味不明の表記である。一方、指数法則では
>
> $$2^3\times2^2=2^{3+2}=2^5\ ,\ 2^3\div2^2=2^{3-2}=2^1$$
>
> のように、掛け算と割り算が指数での足し算と引き算に対応し、計算が滑らかにできる。
>
> ところで、同じ数の割り算、たとえば $2^3\div2^3$ は明らかに結果は１となるが、これに無理やり指数法則を適用してみると
>
> $$2^3\div2^3=2^{3-3}=2^0$$
>
> というように意味不明の記号となる。
>
> そこで、この 2^0 を１とすれば、このような場合にも指数法則がうまく働き、計算が円滑にできる。したがって、$2^0=1$ とする（定義する）のである。

$$2^2=4$$
２倍
$$2^1=2$$
２倍
$$2^0=1$$
２倍
$$2^{-1}=\frac{1}{2}$$
２倍
$$2^{-2}=\frac{1}{4}$$

- - - - - - - - - - -

$$2^2=4$$
２乗
$$2^1=2$$
２乗
$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$
２乗
$$2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$$

図１: 数の関係の統一性

また、$\sqrt{3}$ を指数表現し、指数法則が働く数の仲間にしたいと考えよう。$\sqrt{3}$ とは２乗して３となる数である。指数法則では $(a^x)^2=a^{2x}$ であるから、$\sqrt{3}=3^x$ としてこれを適用すると、$(\sqrt{3})^2=(3^x)^2=3^{2x}=3^1$ となる。そこで、これがつじつまが合うように、$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ とする（定義する）のである。

このように、指数法則が上手く機能するように新しい記号を定義して、拡張された記号においても今までの指数法則が成り立つように「する」のである。その結果、自然数に限定されていた指数が実数全体に拡張され、指数表現された数の間の関係が統一される（図１）。一般に、数学における記号や概念の拡張は、拡張された体系全体でも今までの法則が保持されるようになされる。ここに数学の考え方の本質がある。

ところで、上の枠内の記述で注意深く読むべきところは、「である」「となる」「とする」という言葉遣いを明確に区別しているところである。このことについて、もう少し詳しくみていこう。

●「である」「となる」「とする」の区別

枠内の言葉を分析していこう。第一段落「指数は、…」では「である」が多い。すなわち事実の記述や確認をしているのである。第二段落「ところで、…」では「となる」が多く、計算や論理思考による当然の帰結を記述している。しかも、その当然の帰結が相容れない結果を生じていることを強調している。最後の段落「そこで、…」では、前の段落の矛盾を受けて、それを解消すべく新たな定義を導入し、「$2^0=1$ とする」としている。「とする」は極めて意図的・戦略的な主張であり、この例では「0という指数の定義」を宣言しているのである。

このように、「である」「となる」「とする」の違いを意識することで、思考の論理的な構造が見えてくる。数学が分かりにくく感じたら、これらの言い回しにおける意味の混同が原因であることが多い。また、これらの言葉の使い分けは、数学のみならず社会生活の中での文章表現においても重要な技法である。

● $0!$ はなぜ 1 か

$n!$（n の階乗）とは、$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$、すなわち n までの自然数の積である。たとえば、$4!=4\times3\times2\times1=24$ となる。自然数の範囲内で $n!$ を使っていれば $0!$ は登場しない。なのになぜ必要なのか。

高校数学では次のような場面で登場する。たとえば、「異なる n 個の文字の並べ方は $n!$ である」が、$n=0$ とき「並べない」状況を 1 通りと考える。あるいは、「異なる n 個のものから r 個取り出す仕方は ${}_n\mathrm{C}_r$ である」が、$r=0$ のとき「取り出さない」状況を 1 通りと考える。このように、$0!$ は取ってつけたように登場し、その存在を主張する。

これを数学の概念の拡張と捉えると、法則の整合性の保持を考えることになる。$n!$ の定義は $n!=n\times(n-1)!$ であり、$n=1$ での整合性を考えて、$0!=1$ と定義するのである（図 2 ）。

この階乗の定義の特徴は、階乗をひとつ手前の階乗で順次定義する（自分を自分自身で定義する（再帰的定義という））ことにある。そして、その出発点が $0!$ というわけである。

ここで、自然数の出発点についてみてみよう。それを「 1 とする」ことが多いが、「何もない数 0 」を出発点とする考え方もある。たとえば建物の階数をみると、イギリスでの 1 階は日本では 2 階であり、日本での 1 階はイギリスでは ground floor （地面の階、つまり 0 階）である。このような「0 出発」となる。

$$
\begin{aligned}
4! &= 4\times3! \\
3! &= 3\times2! \\
2! &= 2\times1! \\
1! &= 1\times0! \\
&= 1\times x = 1 \\
\therefore\ x &= 0! = 1
\end{aligned}
$$

図 2 : 階乗における法則の整合性

● $\cos120^\circ$ はなぜ -0.5 か

三角比から三角関数への拡張をみてみよう。三角比は直角三角形における辺の長さ比として定義され、その起源は紀元前18 世紀まで遡る（第 5 話）。 90° 以上の角、さらに一般角に対する三角比を三角関数として定義し体系化したのはオイラー（Euler, 1707～1783）である。さらに彼は、三角関数と指数関数を一括して扱う関数を導入し、複素関数という新たな分野を切り開いた。

高校数学での三角関数は、動径が θ である単位円周上の点 P の座標として定義される（図 3）。この定義は今までの三角比の定義も含み、整合性が保たれている。この定義から、$\cos120^\circ$ は x 軸上の -1 と 0 の中点である。

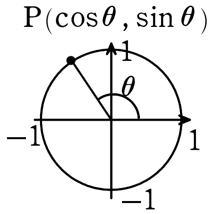

図 3 : 三角関数の定義

● 虚数単位 i の定義は何か

高校数学のなかで数の拡張のクライマックスは、i の登場であろう。それは 2 次方程式の解を表したいという要請から生まれた。つまり、平方完成して $(ax+b)^2=$ 負の値 となる場合、$\pm\sqrt{\text{負の値}}$ を認めることである（第 6 話）。

i は「2 乗して -1 となる値のひとつ」と定義されるが、その性質は今までの数の常識を逸脱している。すなわち、数は 2 乗すれば正または 0 であるはずだが、そうではない。このことから、i は想像上の数の素（imaginary unit : 虚数単位）と呼ばれる。これを素にして $a+bi$ という数（複素数）の体系が構築された。$a+bi$ の a と bi は相容れないものであり、複素数は 2 つの要素をもつ数である。複素数において、2 乗すれば正または 0 である数は実数（real number）と呼ばれるようになったが、実数は $b=0$ の場合の数であり、複素数の一部分とみなし整合性を確保している。

●なぜ定義が必要なのか

定義とは「物事の意味や内容を他と区別できるように、言葉で明確に規定すること」であり、客観的・論理的な議論での共通の前提となる。したがって、議論の展開において不可欠なものである。

一般的な議論では「私は○○を△△と定義して使います」というように論者の立場を明らかにし、その定義に基づいて論を展開する。定義はその論者による規定であるので、議論はその定義の正当性についてなされる。

数学では、定義は様々な概念や記号などの意味や内容を規定している。それらは数学の進展とともに変更されたり、拡張されたりしながら最終的には揺るぎのないものとしして確立され、万人にとって確固たる前提となっている。したがって、数学の学習において、まずすべきことは「定義の理解」であり、これが曖昧であると数学は分からなくなる。