鶯谷中学・高等学校
数学科部長　渡邉泰治

■平方完成は何をもたらしたか

平方完成は 1 次式の 2 乗を作る計算技法のことであり、中学校と高校の数学の最も基本的なものの一つである。実際に、2 次方程式の解を求めるときや 2 次関数の頂点を求めるときに必ず使っている。

これは「平方に開いて 2 次方程式を解く」ための強力な技法であるが、長い歴史を通してどんな役割を演じてきたのだろうか。第 6 話では、その発展と概念の拡大の過程を追っていこう。

●「平方完成し、平方に開くこと」の発見

まず最初に、平方完成とは何かを確認しよう。平方完成とは、2 次式に対して

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

のように、「x^2 と x の係数に応じて定数項を操作して、$(x$ の 1 次式$)^2$ を作り出すこと」をいう。この変形は不自然な計算過程であり、極めて意図的である。それは他でもない、何とか 2 次方程式を解こういう挑戦から生み出された技法だからである。2 次方程式の解法は次のとおりである。

一般に、2 次方程式を $ax^2+bx+c=0$ …① とする。

左辺を平方完成すると、$ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0$

定数項を右辺に移項して、両辺を a で割ると、$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ …②

両辺を「平方に開き」、x を求めると、$x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　$\therefore\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ …③

高校では虚数を学んでいるから、b^2-4ac の正負にかかわらず「平方に開く（平方根を求める）」ことが可能である。このように 2 次方程式は「四則演算で平方完成し、平方に開くこと」によって求めることができる。

この式変形の核心は、② 式で $X=x+\dfrac{b}{2a}$ と変換して「$X^2=$定数」の形にすることであり、グラフで見ると、2 次関数の対称軸を y 軸に移動して解くことを意味する。ここに数学的な「知恵と醍醐味」が盛り込まれている。

③ 式は中高生にとって最重要の公式「2 次方程式の解の公式」として記憶されていることだろう。しかし、そこに大きな考え違いが潜んである。それは、「平方完成し平方に開く」技法に盛り込まれた「知恵と醍醐味」を理解しないまま、公式だけを丸暗記する傾向が強く、「解の公式を忘れたから解けない」という状況が散見されることである。

歴史的にみて、2 次方程式の解法が広く認められるようになるには、「平方に開く」という演算の理解が必要であった。この演算は、現代では四則演算に次ぐ 5 番目の演算として日常化しているが、それにはかなりの年月がかかった。四則演算は古代から容易に理解されていたが、当時は無理数そのものが「怪しい数」と見られていたために「平方に開く」ことの理解は曖昧であったろう。結局、それは無理数の理解と連動して解決していった（第 2 話）。

●「立方に開く」とどうなるか

最も単純な形の 3 次方程式 $x^3=2$ を考えよう。この解はすぐに、3 乗して 2 となるような数 $\sqrt[3]{2}$ であると分かる。これは無理数であり、その小数表現は近似的にはコンピュータですぐに求められるし、精度を際限なく上げる手法も分かっている（第 2 話）。このように $x^3=2$ から $x=\sqrt[3]{2}$ を求める手順を「立方に開く（立方根を求める）」という。

次に、それ以外の解を求めよう。$\sqrt[3]{2}=\alpha$ とおくと、

$x^3=2=(\sqrt[3]{2})^3=\alpha^3$ より、$x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)=0$

であるから、2 次方程式 $x^2+\alpha x+\alpha^2=0$ を解けばよい。これを平方完成して平方に開くと、

$\left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=-\dfrac{3}{4}\alpha^2$ より、$x=-\dfrac{\alpha}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\alpha$

を得る。数学では、$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\omega$ と書く習慣があり、このとき、$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\omega^2$ であることは容易に分かる。

よって、$x^3=2$ の 3 つの解は、$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}\,\omega$, $\sqrt[3]{2}\,\omega^2$ である。

このように、平方や立方に開き、平方根や立方根を求めること、さらに n 乗に開いて n 乗根（べき根）を求める手順を「開べき法」という。四則演算と開べき法によって方程式の解を求めることを「方程式の代数的解法」という。

● 立方完成による 3 次方程式の代数的解法

「2 次方程式が代数的解法で解けるならば、3 次、4 次、5 次・・・はどうか」という疑問は自ずと生じたであろう。16 世紀頃には、フォンタナ（Fontana, 1499～1557, あだ名：タルタリア）、カルダーノ（Cardano, 1501～1576）、フェラーリ（Ferrari, 1522～1565）などによって、3 次、4 次方程式の代数的解法が競い合うようにして発見されていった。ここでは、Cardano による 3 次方程式の解法の概要をみていこう。

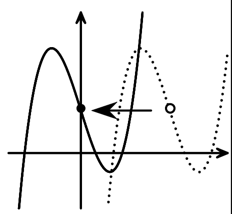
一般に、3 次方程式を $ax^3+bx^2+cx+d=0$ とし、a で割って $x^3+\dfrac{b}{a}x^2+\dfrac{c}{a}x+\dfrac{d}{a}=0$ ……①

① の 2 次の項を消去するために、$X=x+\dfrac{b}{3a}$ とおいて変換すると、$X^3+pX+q=0$ …②

の形に変形できる。この ① から ② への過程を「立方完成」ということがある。

さらに、未知数 X を 2 つの未知数 u, v に分解し、$X=u+v$ とおいて ② に代入すると、

$u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0$ を得る。よって、$u^3+v^3=-q$, $uv=-\dfrac{p}{3}$ …③



を満たす u, v を求めれば、X が求まる。③より、$u^3+v^3=-q$, $u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}$ であるから、

u^3, v^3 を解にもつ 2 次方程式 $t^2+qt-\dfrac{p^3}{27}=0$ … ④

を解けばよい。この解を α, β とすると、$u^3=\alpha$, $v^3=\beta$ となり、「立方に開く」手順を経て、3 つの解は

$X=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[3]{\alpha}\,\omega+\sqrt[3]{\beta}\,\omega^2$, $\sqrt[3]{\alpha}\,\omega^2+\sqrt[3]{\beta}\,\omega$ となる。

（ただし、α, β が虚数の場合、虚数の立方根という表現を認めるとする。）

ここで、① から ② への「立方完成」は、グラフで見ると、3 次関数の変曲点を y 軸上に移動することに相当する。

● 5 次以上の方程式には代数的解法は存在しない

3 次、4 次方程式の代数的解法が発見されてから約 300 年後に、アーベル（Abel, 1802～1829）によって、5 次以上の方程式の代数的解法は存在しないことが証明された。その証明の手法はガロア（Galois, 1811～1832）によって洗練され一般化された。さらに Galois は、演算ができる数の範囲を構造化する「群論」を確立し、抽象代数学の扉を開いた。この考え方は、現在の数学や物理学、コンピュータ科学などの多くの分野へ絶大な影響を及ぼしている。

また、Galois は偉大な数学者という名声の他に、「20 歳の若さで決闘に倒れた革命家」として語られることも多く、その波乱に富んだ短い人生は人々を惹きつけている。

以上、「平方完成」→「立方完成」→「代数的解法」という発展は数と演算の仕組みの探究であった。さらに、「代数的な見方」の深化は「解析的な見方」の深化も伴った。そこでは、連続、無限、関数、微分積分などが扱われる。

現代では、「幾何的」「代数的」「解析的」「数値的」「グラフ理論的」などの様々な数学的な見方や考え方を表す言葉が日常的に飛び交っていて、人間の視野が多角的になっている。これらを大いに活用しよう。