series　高校数学こぼれ話　第５話

鷺谷中学・高等学校
数学科部長　渡邉泰治

■ピタゴラスの定理は何をもたらしたか

ピタゴラス（Pythagoras, B.C. 582～496年）の定理「直角三角形において、斜辺の長さを c 、他の辺の長さを a, b とするとき、$c^2 = a^2 + b^2$ が成り立つ」は三平方の定理とも呼ばれ、世界中で最も人気の高い定理であろう。この定理の証明方法は数百通りあるとも言われ、その人気ぶりが窺える。ただし、この定理はピタゴラスが発見したかどうかは分かっていないが、演繹的に考える方法の基礎を固めたという彼の業績は絶大である。

この定理の基本的な意義は直角と距離を測る道具であることだが、長い歴史を通してこの定理が出発点となり、人類の認識が拡張されてきた。第５話では、その過程を追っていこう。

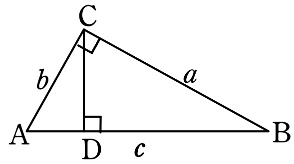


図１：証明１

●定理の代表的な証明と歴史

まず最初に、この定理の証明の代表例を２つ紹介しよう。

【証明１】（図１）図のように、CからABへ垂線CDを下ろす。

$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle BCD$ より

$c : b = b : AD$ つまり $AD = \dfrac{b^2}{c}$ 　また、$c : a = a : DB$ つまり $DB = \dfrac{a^2}{c}$

これより　$c = AB = AD + DB = \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{a^2}{c}$ 　$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2$ 　■

【証明２】（図２）図のように、４つの直角三角形を並べる。面積の関係から

$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \dfrac{1}{2}ab$ 　$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2$ 　■

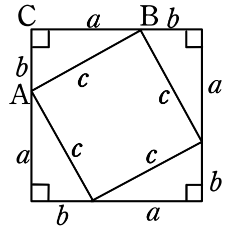


図２：証明２

長い歴史を通して、ピタゴラスの定理が果たした古典的な貢献は、$(a, b, c) = (3, 4, 5)$ などによる直角の作図と、$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ による距離の計量であろう。実際、紀元前18世紀頃の古代バビロニアの時代の粘土板（図３）から直角三角形の辺の比の記述が見つかっているし、距離を測る原理（図４）は現代人の常識である。

直角三角形の辺の比が
書かれている表
Plimpton322,wikipediaより
図３：粘土板

$c^2 = a^2 + b^2$ を満たす具体的な数として、現代の日常で見かけるのは、$(a, b, c) = (3, 4, 5), (1, 1, \sqrt{2}), (1, \sqrt{3}, 2)$ であろう。一方で、無理数が十分には理解されていなかった紀元前では、自然数 a, b, c の組を見つけることが大きな関心事であった。このような自然数の組をピタゴラス数（ただし、$(6, 8, 10)$ のような組を除いた、互いに素なものを原始ピタゴラス数）という。具体例をあげると、

$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), \cdots, (517, 1044, 1165), \cdots$

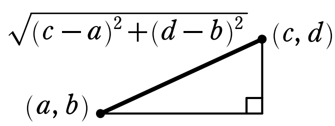


図４：２点間の距離

などがある。実はこの組は無限個あり、いくらでも生成できる。次にその証明と生成方法の概要をみていこう。

$a^2 + b^2 = c^2$ より、$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$ であるから、ピタゴラス数と単位円周上の有理数点 $\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}\right)$ が対応するので、有理数点が無限個あるかどうかを調べればよい。

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ と、有理数 m を傾きとする直線 $y = m(x+1)$ の交点Pは、四則演算で $\left(\dfrac{1-m^2}{1+m^2}, \dfrac{2m}{1+m^2}\right)$ と表されるので、有理数点である。ここで $m = \dfrac{q}{p}$ （p, q は既約な自然数）とおくと、点Pは $\left(\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \dfrac{2pq}{p^2+q^2}\right)$ であり、ピタゴラス数は

$(a, b, c) = (p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ 　ここで、$p > q$

で表される。p, q は無限個あり、しかも $2pq$ は重複しないので、この組は無限に作ることができる。

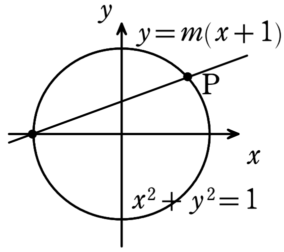


図５：単位円上の有理数点

●一般の三角形への拡張

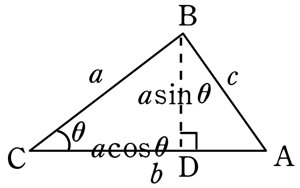


図6：余弦定理

直角三角形でない三角形ではピタゴラスの定理は成立しないが、現代では「拡張されたピタゴラスの定理」である余弦定理をそこで常用している。次に、この定理を構築しよう。

△ABCにおいて、∠C=θとする。頂点Bから辺ACに垂線BDを下ろす（図6）。△ABDにおいてピタゴラスの定理を適用すると、AD=$b-a\cos\theta$, BD=$a\sin\theta$ より

$$c^2=(b-a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2=a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2-2ab\cos\theta=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

が得られる。$\theta=90°$ のとき $c^2=a^2+b^2$ となることから、上式は一般化されたピタゴラスの定理とみなされている。

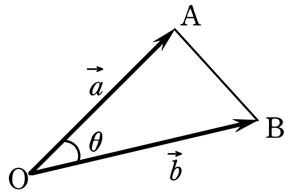


図7：ベクトルで表す余弦定理

次にベクトルの分野をみてみよう。2つのベクトルを $\vec{a},\vec{b}$、なす角をθとすると（図7）、

$$|\overrightarrow{AB}|^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

であり、これは余弦定理と同じある。というよりも、一致させるためにベクトルの内積をこのように定義したのであり、幾何学的な関係と代数的な関係、さらに解析的（関数的）な関係の間に整合性が保たれるようにしたのである。ここに、数学の根幹にある考え方が顔を出す。すなわち、異なった分野の間を同一の法則や原理で結びつけて、終始一貫性を確保するのである。

●次元と距離の概念の拡張

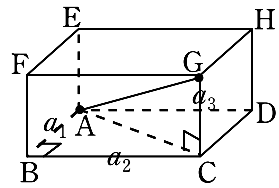


図8：3次元の距離

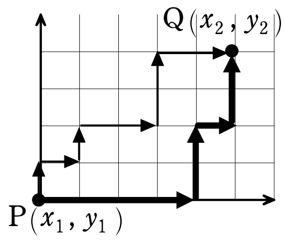
ピタゴラスの定理を用いて距離を測ることは現在でも日常茶飯事である。平面の場合は既に述べたが、3次元空間ではどうか。図8のように、2つの直角三角形△ABCと△ACGにおいてピタゴラスの定理を2度使って

$$d=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$$

が得られる。さらに次元を上げると、一般に n 次元空間における距離は

$$d=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_n{}^2}$$

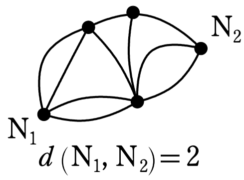
で定義される。このような距離は、曲がっていない n 次元空間における距離という意味で、ユークリッド距離と呼ばれている。



$d(\mathrm{P},\mathrm{Q})=9$

図9：マンハッタン距離

現代では様々な非ユークリッド距離が定義され、認識を広げている。例えば、格子状経路を辿る距離（マンハッタン距離）は $d=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ で定義され（図9）、グラフ理論では点間の距離は到達に要する辺の数の最小値で定義される（図10）。また、相対性理論ではこの宇宙を非ユークリッド空間として扱っている。



$d(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2)=2$

図10：グラフ理論での距離

さらに数学以外の分野でも、その分野の特質に応じた距離が定義されている。例えば、言語学では言語間の距離、生物学では遺伝子間の距離、社会学や地理学では移動にかかる時間を尺度とした距離などがある。

●指数の拡張

hooktail.sub.jp/algebraより

図11：フェルマーに因むフランスの切手

ピタゴラスの定理の拡張として、指数の値を一般化することが課題となった。すなわち「$n>2$ の自然数 n について、$z^n=x^n+y^n$ を満たす自然数 x, y, z は何か」という問題である。これに対して、フェルマー（Fermat）が1630年頃に「そのような x, y, z は存在しないことを証明したが、ここには書き切れない」という意味の走り書きを残したことから、この問題はフェルマーの最終定理と呼ばれるようになった。それから約360年の間、未解決の難問として数学者達の挑戦を退け続けてきたが、1995年にワイルズ（Wiles）によって証明された。

以上のように、ピタゴラスの定理の意義は、直角や距離を測るという最も親しやすい定理であることにとどまらず、約三千年にわたる人類の好奇心や探究心を刺激し続け、物事に対する認識の拡大と深化を促してきたことにある。