series　高校数学こぼれ話　第４話

鶯谷中学・高等学校
数学科部長　渡邉泰治

■帰納法、演繹法とはなにか

これらは客観的かつ論理的な推論の代表である。推論（reasoning）とは根拠や論拠に基づいて判断したり結論を出したりすることであり、日常的な場面から高度な研究の場面まで、至るところで使われている。

数学の学習ではこれらの推論の仕方を学び、様々な場面で活用できるように鍛えている。第４話では、帰納法と演繹法とはなにか、どのように使うのかをみていこう。さらに、その他の推論も含めて思考方法全体を概観しよう。

●帰納法（inductive reasoning）

まず最初に、帰納法をみていこう。これは「具体的、個別的、特殊な事例から一般的、普遍的な法則や規則などを引き出すこと」と定義される。

数学の例として、「a, b を実数とするとき、『$a \geqq b$』と『$a^2 \geqq b^2$』との関係を調べよ」という問題に対して帰納法を適用していこう。この方法では、a, b の具体的な値に対してどうなるかを調べて、法則や規則を推理していく。

「$a=2, b=1$ の場合は、$a^2=4, b^2=1$ である」、「$a=-1, b=-2$ の場合は、$a^2=1, b^2=4$ である」、
「$a=2, b=-1$ の場合は、$a^2=4, b^2=1$ である」、「$a=1, b=-2$ の場合は、$a^2=1, b^2=4$ である」、
「$a^2=4, b^2=1$ の場合は、$a=\pm 2, b=\pm 1$ の４通りの組み合わせがある」

これらの事例から、「『$a \geqq b$』と『$a^2 \geqq b^2$』の関係は必ずしも一致しない」ことが結論づけられる。

また、日常的な例として、「１年１組の生徒のなかで、A, B, C, D, E さんがケータイを持っていたので、この組の全員がケータイを持っていると推測される」という推論も帰納法である。

帰納法は、個別の事例の状況や複数の事例の中にある一定の傾向がつかめる点でわかりやすいが、一般的、普遍的なことは推測の域を出ない。この意味で帰納法は「思考の流れの出発点」の役割を演じる。

●演繹法（deductive reasoning）

次に、演繹法をみていこう。これは「一般的、普遍的な前提から、個別的や特殊な結論を導いたり、必然的な結論を導くこと」と定義される。

前述の数学の例に演繹法を適用してみよう。この方法では、一般的に言えることを導き出していく。

まず、a^2 と b^2 を比較するためにその差を考えると、$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ となる。
ここで、$a \geqq b$ であれば $a-b \geqq 0$ であるから、$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ の符号は $a+b$ の符号と一致する。

このことから、「$a+b \geqq 0$ ならば『$a \geqq b$』と『$a^2 \geqq b^2$』とは一致するが、そうでなければ一致しない」ことが必然的な結論として導かれる。

日常的な例としては、「このクラスは男子クラスである。A さんはこのクラスに属している。よって、A さんは男である」という三段論法や、「一般に〇〇だから、この場合も〇〇である」という推論も演繹法である。

演繹法は前提から出発して論理的な思考過程を経て結論に至るので、導き出された結論は必ず正しいという点で優れている。しかし、その前提が正しくなかったり、不適切であったりすると結論の正しさは保証されない。

数学では、結論は新たな前提として更なる結論を導出していく。逆に、「前提の前提は正しいか、そのまた前提は正しいか」のようにさかのぼっていくこともある。この場合、行き着いたところが公理・公準と呼ばれ、これは証明なしに認める前提となる（図１）。数学の体系は公理・公準から出発する正しい前提と結論の連鎖として記述されることが多いが、数学が構築される過程や様々な問題を解いていく過程では逆方向も活躍する。

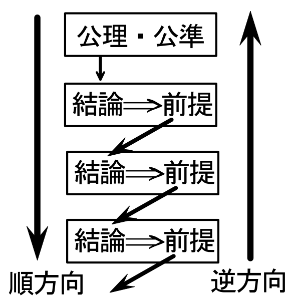

図１：前提と結論の連鎖

帰納法と演繹法のほかに仮説検証（abductive reasoning）という思考方法がある。これは、例えば「テレビが映らな

いが、プラグが抜けてないか？」というように手短な仮説を立てて検証する方法であるが、詳細は省略する。

●発見的な推論（heuristic reasoning）

「これはどうなっているのか」と考えているときに、「あ！そうか」と気がつくことがある。これが発見である。発見は帰納法でも演繹法でもなく、まさに「気がつく」「みつける」ものであるから、発見の方法論は存在しないので説明のしようがない。とはいっても、数学の学習における発見を類別すると、次の 2 つが主なものとして挙げられる。

> ① いくつかの事例のなかに共通する法則や原理を見つける
>
> 【例】「$1^2=1,\ 2^2=4,\ 3^2=9,\ 4^2=16,\ 5^2=25,\cdots$ より、あ！そうか、$n^2 \not\equiv 2\,(mod\ 3)$ になりそう。」
>
> ② 表面的には異なってみえる事柄や思いがけない事柄を結びつける
>
> 【例】「$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ より、
>
> あ！そうか、上式から、解と係数の関係、因数分解、解の公式、頂点の座標、x 軸との交点が結びつくのだ。」

このような発見をする能力を養うには、知識を断片的に覚えるだけでなく、知識と知識の関係に注意を払う習慣をつけることが必要である。たとえば、上の②の例では、2 次式、2 次方程式、2 次関数の相互関係をじっくり見ること、つまり、それらに関する公式や関係を導出する過程を丁寧に追って、そのなかに潜む知恵をよく見ることである。

●帰納→発見→演繹という思考の流れ

最後に、問題を解決する思考の流れについて考えてみよう。一般に、思考の流れは、帰納→発見→演繹という過程を経ることが多い。具体例として、次の問題を考える。

> △ABC に内接する正方形を作図せよ。ただし、正方形の一辺は辺 BC 上にある。

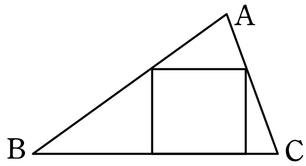

図 2：内接する正方形の作図

これは、ポリア著「いかにして問題を解くか」（丸善）からの引用である。この本は問題解決についての原理原則を解いた本であり、マイクロソフト社の新入社員の必読書とされたことから、最近日本の社会人の間でよく読まれている。

この問題に則して思考の流れを見ていくと、帰納的な思考段階（図 3）では、正方形の 3 頂点が△ABC の周上にある正方形をいくつか描いてみる。次の発見的な思考段階（図 4）では、三角形の周上にない頂点が一直線上に並ぶことを見つける。演繹的な思考段階（図 5）では、作図手順を整理するとともに、その方法が正しいことを論証する。

【整理された作図手順】

①正方形の 3 頂点が△ABC の周上にある任意の正方形PQRS を作図する。

②直線BRと辺ACの交点を F とし、長方形DEFG を作図する。これが内接する正方形である。

【論証】

△BQRと △BEF において、

∠QBR＝∠EBF（共通）　∠BQR＝∠BEF（直角）　∠BRQ＝∠BFE（同位角）

であるから、△BQR ∽ △BEF　ここで相似比を $1:k$ とすると、EF=k QR …①

△BRSと △BFG において、

∠RBS=∠FBG（共通）　∠BRS=∠BFG　∠BSR＝∠BGF（同位角）

であるから、△BRS ∽ △BFG　相似比は BR:BF= 1:k より、FG=k RS …②

①②において、QR＝RSより　EF=FG

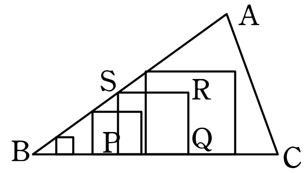

図 3：帰納的な思考段階

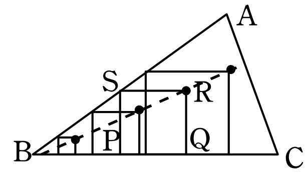

図 4：発見的な思考段階

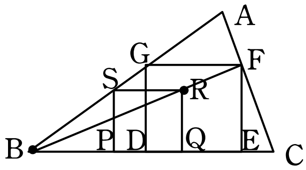

図 5：演繹的な思考段階

●数学的帰納法（mathematical induction）は演繹法である

すべての自然数 n に対してある命題が成立することを示す数学的帰納法は、実は演繹法である。この方法の核心部分では、$n=k$ のとき成り立つと仮定し、$n=k+1$ のときも成り立つことを「演繹的に」証明していく。数学的帰納法という命名は、$n=1,\ n=2,\ n=3,\ \cdots$ のように順次事例を積み重ねることを連想させるからであろうが、誤解を招きやすい名前であるので、注意が必要である。