

■何のために数学を学ぶのか

1 数学は万人のもの

皆さんは「何のために数学を学ぶのか」という疑問について、じっくりと考えたことがあるだろうか。

とりあえずの回答として、高校の単位を取得するため、大学入試に対応するためなどが思い浮かぶかもしれない。しかし、大学に合格すれば数学を学ぶ必要はなくなるのだろうか。あるいは、少し先を見据えて、将来の仕事で高度な数学を使うためと答えるかもしれない。しかし、将来数学を使わない人は学ばなくてもいいのだろうか。そもそも、将来数学を使わない人っているのだろうか、この高度な科学技術の上に立つ世の中で。

実際、人類は数千年にわたって数学を学び続けることで人間の思考や認識を磨き進化させながら、文明と文化を進展させてきた。この視点からすれば、数学は万人のために存在しているはずである。このことを踏まえると、主題の疑問に対する最終的な回答は「数学の見方や考え方を身に付けて、それを自分の人生に生かすため」と言えるであろう。第3話では、この回答の意味を考えていこう。

2 数学的な見方や考え方とはどのようなものか

数学の勉強をしていると、様々な見方や考え方に出くわす。たとえば、「次の自然数を素因数分解せよ」「次の式を因数分解せよ」という問題では、「対象を要素に分解して内部構造をみると、いままで見えなかったことに気づく」こともある。また「曲線上の点Aで接線を引け」という問題では、「曲線上の2点A, Bを通る線を引き、BをAに限りなく近づければよく、上手い考え方をするものだ」と感心したりする。

このような数学的な見方や考え方は、数千年にわたる人類の様々な思考やアイデアの蓄積を昇華させ、集大成したものである。それらは、時代の変遷とともに整理されたり洗練されたりしながら高度化と抽象化をしてきたので、馴染みにくいもの、生活離れたものと受け止められがちである。しかし、それらは元々、身の回りの些細な疑問である「なぜそう考えれば上手くいくのか」や「どういう考え方をすれば分かりやすいか」などを整理したものに過ぎない。次に、そのような視点から具体的にみていこう。

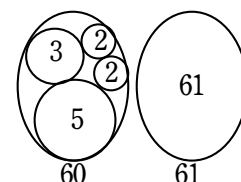


図1: 数の内部構造

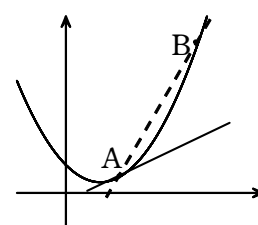


図2: 曲線に対する接線

3 数学的な見方や考え方の具体例と日常的な活用例

以下に、数学の見方や考え方の主なものを10項目に整理して列挙した。さらに、それらが日常生活の様々な場面で有効に発揮される具体例も添えた。

① 定義を明確にしたり根拠や論証により判断したりするなど、客観的で論理的な言葉遣いをする

(定義、論理、推論)

例: 「 $\sin \theta$ とは単位円周上の点の y 座標のこと」のように、「〇〇とは□□のこと」という定義をきちんと述べる

: 「AさんがBといった」からではなく「Bが真実である」から、それに従う

: 「Aである」と主張するならば、その根拠やデータなどを示しながら論証しようとする

: 「AならばBである」ことと「BでないならばAでない」ことは同じである

: このゲームは〇〇というルールによっているので、それに従って考察(行動)する

: 「AならばB、BならばC、よってAならばC」のように、推論を進める

- ：「～である、～とする、～となる」を区別して使う
- ：「A と思います」を避け、「A は真である」「A と聞いている」「A が推測される」などの表現を心がける
- ：文章を書く時、分解された段落を適切な接続詞で繋ぎ、全体を論理的に構成する

② 59 はこれ以上分解できないが、60 は $22 \cdot 3 \cdot 5$ のとおり分解できるように、物事を要素に分解する（分解）

例：得体の知れないものについて、それを構成している要素を探そうとする

- ：文章を書く時、長さと内容に応じて段落に分解する
- ：古文は品詞分解すると読みやすい

③ $14 + 63$ は共通因数でくくると $7(2 + 9)$ であるように、同様のものは一括して扱う（結合、統合、類比）

例：食器を洗うとき、油污れのものは一括して洗剤で洗う

- ：ゴルフとテニスのスウィングは、体の軸をぶらさない点で共通するから、同じ練習が必要である
- ：強化ガラスと結束力のある人間集団には共通して、内部に引き（惹き）合う力が存在する
- ：頂角が 104.5° の二等辺三角形と水の分子は同じ形状をしているので、同じ図形上の性質をもつ

④ 要素の間に存在する関係を調べる（並列、直列、順序、包含、相関、因果、関数、・・・）

例：A, B, C の作業手順を考えると、A, B は同時並行で実行可能だが、C は A の終了を待って実行する

- ：A の内容は B の内容に含まれるので、A を実現するには B を実現すればよい
- ：ケータイの使用時間の多さは学習成績の悪さと何らかの関係があるが、それが原因と断定はできない
- ：日本人の英語の習熟量は英語を使う時間と関係する、すなわち習熟度と活用時間は関数関係にある

⑤ 現象を数学の言葉で表現しようとする（数学的表現、モデル化）

例：「みんな A を持っている」ではなく、「40 人中 \bigcirc 人が A を持っている」というように数量的に示す

- ：「高校時代の知識量の増加は指数関数的である」と表現すると分かりやすい
- ：ドレミファ…という音を発する弦の長さは等比数列をなすが、人間はそれらの高さの違いを階段状に感じる
ので、「音の高低に関する人間の感覚は対数関数的である」と表現できる

⑥ 具体的なことと抽象的なことの間を行ったり来たりする（帰納と演繹、一般化と特殊化）

例：具体的なこれらの事例を調べると共通点が見出され、一般的に $\bigcirc\bigcirc$ と言える

- ：一般に $\bigcirc\bigcirc$ ということが証明されているから、この場合も $\bigcirc\bigcirc$ が成り立つ
- ：リンゴが 5 個、鉛筆が 5 本などを個別に扱うより、抽象化された 5 という概念の方が扱いやすい

⑦ 数量的なものと図形的なものとの間を行ったり来たりする（数量と図形、代数と幾何）

例： $\bigcirc\bigcirc$ 演奏会での私の指定席は「す 21」なので、会場の真ん中あたりでしょう

- ：この 10 日間の気温変化は激しく、寒暖の差が 25°C であった。グラフ（図式）化するとこのようである

⑧ 確率的あるいは統計的な揺らぎを踏まえることができる（揺らぎ、確率・統計）

例：さいころを振っているとき、1 の目が連続して 10 回出たが、次に 1 が出る確率はやはり $1/6$ である

- ：あるクラスから任意に 2 人ずつ抽出することを 3 回繰り返したとき、全員が男子であったからといって、そのクラスが男子クラスとは断定できない

⑨ 発想の転換ができる（柔軟性、想像力、自由さ）

例：論理的な推論を押し進めても上手くいかないとき、まったく異なる考え方や方法を模索できる

：押してだめなら引いてみる、表だけで分からなければ裏をみる、2次元でだめなら3次元で考える、図形だけで上手くいかなければ座標を持ちこむ、微分でだめなら積分してみる、対偶を考える、・・・

⑩ 美しさに憧れる（美的感性）

例：「最も美しい学問は何か」という問いに対して、多くの人々が数学と答える。（なぜ？ 自分で考えよう）

これらの共通点はすべてが言語活動ということである。なぜなら、我々は思考・判断・表現などを言葉でおこなうので、見方や考え方はそのときの言葉遣いに依存するからである。この意味で、数学の学習は言葉の選択能力を鍛えているとも言うことができる。

4 数学の見方や考え方を身に付ける方法

これらを身に付ける方法は、「高校数学を真剣に学ぶこと」に尽る。実際、数学の問題を解くことでこれら10項目のことが鍛えられるし、逆に、これらを縦横に駆使しながら問題を解いているのである。たとえば、大学入試の問題に挑戦するときは、その問題に潜む得体の知れない状況をいくつかの解きやすい部分に分解したり、分解した部分の間にある関係を調べたり、特殊な場合を吟味したり、図形的に把握し直したり、発想を変えてみたりして、問題に喰らい付いていでしょう。このような経験の蓄積が大切である。

したがって、数学の学習で大切なことは予習をすることです。つまり、数学の問題を必ず自分で解いてみるという体験が必須である。その場合、解けなくても構わない。むしろ解けない場合の方が、身に付いていない項目が見つかるから勉強になる。これに対して、自分で解いてみるより先に解き方を聞いてしまうと、見方や考え方をを見つけ出すという力が鍛えられない。だから予習が肝心であり、さらに学習したことを復習により確実なものにするとよい。

このように、「数学を学ぶ目的は、数学の問題を解くことを通して数学的な見方や考え方を鍛え、それを自分の日常生活や人生に生かすことである」とまとめることができる。

5 数学は本当に美しいのか

最後に、「⑩ 美しさに憧れる」ことについて触れておこう。一般に、数学の美しさを形容する言葉として、秩序、真理、普遍性、永遠性、広大さ、対称性、構造、単純さ、明快さ、豊かな表現、論理性、機能性、拡張性、自由さ、巧みさなどが挙げられる。これらは数学の美しさの一部を表現しているに過ぎない。数学は長い歴史的な発展過程を通して様々なことを解明し、そして新たな美しさをその中に見出してきた。いわば、数学がこの世界の様々な美しさを掘り起こしながら、数学自身も美しく輝いてきたとも言える。

皆さんのなかには、既に数学の美しさを感じている人も多いだろう。もちろん、「数学はなぜ美しいのか」という疑問に対する答えは簡単には見つからない。それは一生かけて探究するものであり、探究する姿勢自身も美しさのひとつ