series　高校数学こぼれ話　第 26 話

鶯谷中学・高等学校
数学科部長　渡邉泰治

## ■平均とはどのように平滑化することなのか

日常的に出会す一連の数の組に対して、これらの平均値が気になることが多々ある。たとえば、3 人の数学の試験の点数が 45, 70, 65 のとき、平均点は $(45+70+65)/3=60$ というわけである。この場合の平均は相加平均と呼ばれる。一般に平均という概念は複数あるが、高校数学では代表的な 3 種類、相加平均、相乗平均、調和平均を学ぶ。

この第 26 話では、これらの平均についての意味や活用方法について議論していこう。

### ●相加平均とは何か

相加平均 $\overline{x}_{ari}$ は、$n$ 個の数 $x_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$ に対して $\overline{x}_{ari}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ で定義され、$n$ 個の数の統計的な代表値の一つである。この平均は $n$ 個の数値の凸凹を平滑化する意味をもつ（図 1）。この意味から、これは算術平均（arithmatic mean）と呼ばれる。また、3 つの数 $a, b, c$ がこの順に等差数列をなす（$b-a=c-b$）とき、$b=(a+c)/2$ となり、$b$ は $a, c$ の相加平均として収まりがよい。

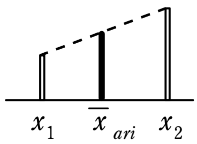

**図 1：算術的平滑化のイメージ**

### ●相乗平均とは何か

相乗平均 $\overline{x}_{geo}$ は、$n$ 個の正数 $x_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$ に対して $\overline{x}_{geo}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$ で定義される。この平均の意味は算術的平滑化ではなく図形的平滑化なので、分かり難い。具体例を挙げると、たとえば、縦 3 (m), 横 4 (m) の長方形の面積を変えず縦横の長さを平滑化（正方形化）するということであり、このときの正方形の 1 辺の長さは $\sqrt{3\times4}=\sqrt{12}$ となる（図 2）。この意味から、相乗平均は幾何平均（geometric mean）と呼ばれる。

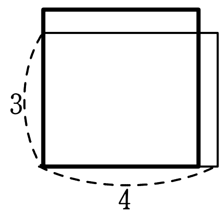

**図 2：図形的平滑化のイメージ**

他の例として、一定の比率で変化する量の平滑化という見方がある。たとえば、売り上げが一定の比率で増加しているとき、初年度が 2 億円、2 年後に 3 億円になっていれば、1 年後は $\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$ 億円であった。また、3 つの正数 $a, b, c$ がこの順に等比数列をなす（$b/a=c/b$）とき、$b=\sqrt{ac}$ となり、$b$ は $a, c$ の相乗平均として収まりがよい。

### ●調和平均とは何か

調和平均 $\overline{x}_{har}$ は、$n$ 個の数 $x_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$ に対して $\overline{x}_{har}=\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}$ で定義される。つまり、この平均は $x_k$ の逆数の相加平均の逆数のことである。

この平均の意味も、相乗平均に劣らず分かり難い。この平均の意味を理解する代表例は、「A 町から B 町へ車まで行くとき、行きは平均時速 60 (km/h)、帰りは平均時速 40 (km/h) であった。往復全行程の平均時速を求めよ。」という問題であろう。この解は相加平均の 50 (km/h) ではない。実際に求めてみよう。A 町から B 町までの距離を $d$ (km) とする。 行きに要した時間は $d/60$ (時間)、帰りに要した時間は $d/40$ (時間) であり、全行程の距離は $2d$ (km) であるので、往復の平均時速 $s$ は $s=\dfrac{2d}{\dfrac{d}{60}+\dfrac{d}{40}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{40}}=48$ (km/h) となり、60 と 40 の調和平均である。

前述の定義より、この平均は $x_k$ の逆数の相加平均の逆数であるから、いわば逆数の算術的平滑化の逆数である。実際、上述の問題のように、速度は要した時間の逆数に比例している。同様の例として、「ある仕事を A が単独で行うと 6 時間かかり、B が単独で行うと 3 時間かかるとする。このとき、A, B の 2 人で行うと何時間かかるか」という問題も仕事率という仕事量の逆数を扱うことになり、やはり調和平均が登場する。

ところで、「調和」という言葉は、古代ギリシアのピタゴラス学派による音階の定式化に由来するとされる。この学派の音階の構成方法は、異なる高さの音を響き合う（harmonize：調和する）ように配列することであった。具体的には、ドミソド’の弦の長さを $1:\frac{4}{5}:\frac{2}{3}:\frac{1}{2}$ とした（第13話）。このとき、ソはドとド’、ミはドとソの調和平均となっていて、収まりがよい。このように、調和する音列を重んじた音階と関連したことが調和平均（harmonic mean）と言われる所以となった。数学ではさらに一般化して、自然数の逆数の列を調和数列と呼んでいる（第9話参照）。

## ●相加平均、相乗平均、調和平均の相互関係はどうなっているのか

一般に、$n$ 個の正数 $x_k\,(k=1, 2, \cdots, n)$ に対して、相加平均≧相乗平均≧調和平均、すなわち

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} \geqq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \quad \cdots ①$$

が成り立つ。相加平均≧相乗平均の証明はデンマークの数学者イェンゼン（Jensen, 1859－1925年）の不等式を利用したものが直感的に分かりやすく、また、高校数学の格好の教材でもある。その概要は次の通りである（図3）。

対数関数 $f(x)=\log x$ とその曲線上の $n$ 個の点 $\mathrm{A}_1(x_1, \log x_1)$, $\mathrm{A}_2(x_2, \log x_2)$, $\cdots$, $\mathrm{A}_n(x_n, \log x_n)$ を考える。この曲線は上に凸なので、凸多角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ の物理的重心 $\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \frac{1}{n}(\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n)\right)$ は多角形の内部にあるので、対数関数上の点 $\mathrm{P}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$ の下にくる。よって、

$$\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \frac{1}{n}(\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n)=\log\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$$

が得られる。これから真数の大小関係にすればよい。

また、相乗平均≧調和平均の証明は、調和平均は $x_k$ の逆数の相加平均の逆数であるから、相加平均≧相乗平均の逆数をとって適用すると、次の関係が得られる。

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqq \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{x_n}}}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$$

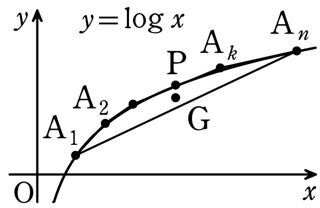

図3：相加相乗平均の関係
（対数関数による証明）

## ●高校数学では、相加相乗平均の関係（相加平均≧相乗平均）をどのように活用するか

高校数学では「相加相乗平均の関係」は頻繁に、しかも思わぬところで登場する。そこでは不等式を証明したり最小値を求めたりするが、この関係を適用する問題には次のような3つのタイプがある。

(1) 正の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して、$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2$ を証明せよ。

(2) $x>1$ のとき、$x+\frac{1}{x-1}$ の最小値を求めよ。　(2)’ $x>0$ のとき、$2x+\frac{1}{x^2}$ の最小値を求めよ。

(3) $x>0$ のとき、$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3$ の最小値を求めよ。

(1) では、① の関係を直接利用するタイプの問題である。(2) では、$x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1 \geqq 2\sqrt{\frac{x-1}{x-1}}+1$、(2)’ では、$2x+\frac{1}{x^2}=x+x+\frac{1}{x^2}\geqq 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}}$ という工夫をするタイプである。また、(3) では、$t=x+\frac{1}{x}\geqq 2$ より　$f(x)=f(t)=t^2-2t+3\,(t\geqq 2)$ と考えるタイプである。いずれの問題においても、「相乗平均は定数となり、最小値を与える」ことを見抜くことが求められる。この点が相加相乗平均の関係を活用する視点である。