series　高校数学こぼれ話　第 23 話

鶯谷中学・高等学校
数学科部長　渡邉泰治

■瞬間の変化をどのように捉えればよいか

人類が「変化する状況をどのように捉えればよいか」という疑問を抱いたのは、かなり古いことであろう。人間の身体的な経験から、常に流れている時間の中で物事が変わって有様に興味が湧くのは自然である。それが数学上の課題として表面化したのは、有名なゼノン（ Zeno, B.C.490 − 430年頃）の逆説（パラドックス, paradox）である。その一つの「飛んでいる矢は止まっている」という主張は難問として人類に投げかけられ、数学を通して挑戦が始まった。

この第 23 話ではゼノンの主張の行方を追いながら、変化の捉え方を高校数学に関連して考えていこう。

●「飛んでいる矢は止まっている」は何を言っているのか

ゼノンの主張を現代的に言うと「すべての物は静止しているか動いているかのいずれかである。物が自身に等しくある（その空間を占有している）とき静止している。動くものは瞬間に自身に等しいならば動いていない」である。これが投げかけた疑問は「瞬間とは何か」「瞬間を積み重ねるとどうなるのか」ということであった。この議論はその後約二千年続き、実数と関数の連続性を扱う極限の概念を生み出し、時間と空間の認識を深めていった（第 1, 9 話参照）。

●「飛んでいる矢は止まっている」は結局どうなったか

この逆説に対する現代の解釈を先に言うと、「動いている物体に対して、瞬間に止まっているか否かの議論は不毛であるが、瞬間において速度をもっている」と考えている。ニュートン（Newton, 1642 − 1727年）やライプニッツ（ Leibniz, 1646 − 1716年）によって確立されたこの考え方は微分積分法と呼ばれ、人類に思考の革命をもたらした。

微分積分法でこの逆説を解き明かそう。物体の時刻 t における位置を x とし、それが $x=f(t)$ の関係を満たしながら動いているとする。ここで速度を考えると「速度（平均変化率）＝移動距離÷要した時間」であるから、瞬間の速度は、要した時間を 0 に近づけたときの平均変化率の値、つまり極限値を求めればよい。この操作が微分の定義であり、瞬間の速度は $f(t)$ の導関数と呼ばれる。たとえば、$x=f(t)=t^2$, 要した時間を h とすると、瞬間の速度 $v(t)$ は

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^2-t^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ht+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2t+h)=2t$$

となる。よって、速度は $v(0)=2\times 0=0,\ v(1)=2\times 1=2, \cdots$ であり、それぞれの瞬間において有限な値をもつ。 この状況は、たとえば自動車に乗っているとき、刻々の瞬間における速度は速度計で実体として観測される。このように、「瞬間は点ではなく切断面である。また、刻々の瞬間では速度をもち、運動が継続されている。」と理解する。

●微分積分法は高校数学ではどのように扱われているか

高校数学では、一般の関数 $y=f(x)$ 上の任意の点P$(x, f(x))$ において、 $f(x)$ が瞬間に変化する方向（ $f(x)$ を描いているとき、点P において鉛筆が進む方向）、言い換えると、点P における接線の傾きを考え、それを関数とみる。これが導関数 $f'(x)$ である（図 1）。$f(x)$ から $f'(x)$ を求めることを演算と捉えて、「 $f(x)$ を微分する」という。

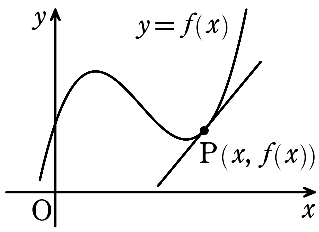

図 1：導関数の図形的意味

微分法に対して、その逆演算として積分法が構築される。つまり、微分して $f(x)$ となるような関数を $F(x)$ として、$F(x)$ を求めることを「 $f(x)$ を積分する」という。ここで、 $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分（原始関数）という。定数を微分すると 0 であるから、不定積分は $F(x)+C$ という定数分だけの任意性をもつ。この不定積分を $\int f(x)dx$ と書く。

積分法は図形の面積や体積と関連して学ばれる。ここで、その基本的な考え方を確認しておこう。関数 $y=f(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq 0$ のとき、$y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよう（図 2）。a から x までにできる図形の面積を $S(x)$ とすると、$S(x)$ が瞬間に変化する量 $S'(x)$ は「 $f(x)$、すなわち線分PQ の長さ分（厚み

のない微小面積）である」という考え方をする。これを記号で表すと、$S'(x)=f(x)$ である。これより$S(x)=\int f(x)dx=F(x)+C$ を得る。ここで、 $S(a)=F(a)+C=0$ より $C=-F(a)$ であり、$S(x)=F(x)-F(a)$ となる。求める面積 S は $S(b)$ であり、$S=S(b)=F(b)-F(a)$となる。これを$\int_a^b f(x)dx$ と書く。

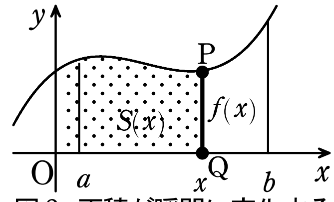

図 2：面積が瞬間に変化する量はPQ の長さ$f(x)$

このように「瞬間に変化する量」を考えることは、円の面積と球の体積の求積に有効である。半径 x の円の面積と球の体積をそれぞれ $S(x), V(x)$ とすると、面積が瞬間に変化する量 $S'(x)$ は円周の長さ $2\pi x$ と考えて $S'(x)=2\pi x$ 、体積が瞬間に変化する量 $V'(x)$ は表面積 $4\pi x^2$ と考えて $V'(x)=4\pi x^2$となる。これと $S(0)=0, V(0)=0$ より、$S(r)=\int_0^r 2\pi x dx=\pi r^2, V(r)=\int_0^r 4\pi x^2 dx=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ を得る（図 3）。なお、高校では球の表面積の導出は範囲外なので、球の体積を円の回転体として求め、それを微分して表面積を求める方が常道である。

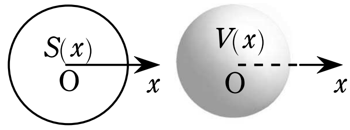

図 3：面積、体積が瞬間に変化する量は円周の長さ、球の表面積となる

●瞬間ではない状況ならばどうなるのか

瞬間とは連続的に変化する量に対しての概念であり、微分積分法で扱う関数の変数は連続量である。一方、日常的には 1 秒ごと、1 時間ごと、1 年ごとにどう変化するかということも関心事である。この場合、関数に対応するものとして数列を考える。数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$ の n は自然数であるが、その単位は秒でも時間でも年、あるいは回数や場所でもよい。このとき、数列の一般項は $a_n=f(n)$ のように離散的な自然数 n の関数として表される。

ここで階差数列を考えよう。数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は $b_n=a_{n+1}-a_n$ であるが、これを導関数と比べてみよう。

$$b_n=a_{n+1}-a_n=f(n+1)-f(n)=\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}$$

であるから、b_n は関数 $f(x)$ の区間 n と $n+1$ における平均変化率と同じである。このことから、数列 $\{a_n\}$ から階差数列 $\{b_n\}$ を求めることは、関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることと同様の演算であると考えられる。ただし、離散量と連続量の手続きの違いがあり、前者は幅を 1 、後者は幅を 0 に近づけた極限として処理される。この意味から、数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の「差分」と呼ばれる。微分と差分を対比させて書くと次のようになる。

$f(x)=2x$ を微分して　$f'(x)=2$　 ⇔ 　$a_n=2n$　を差分して　$b_n=a_{n+1}-a_n=2(n+1)-2n=2$

数列において積分に対応するものは、階差数列 $\{b_n\}$ から元の数列 $\{a_n\}$ を求める手続き

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (\text{ただし } n\geqq 2)$$

がそれである。一般に、積分の$\int_a^b f(x)dx$ と数列の和の $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ は、瞬間を連続的に加えるか、離散的な値のまま加えるかの違いであると考えられる。この意味で、階差数列 $\{b_n\}$ から元の数列 $\{a_n\}$ を求めることを「和分」と呼ばれる。

以上、変化を数学的に捉える方法をみてきた。簡潔に言うと、連続的な変化ならば瞬間の変化を、離散的な変化ならば差という変化を捉えるということであった。このような考え方は現代では日常的な思考の道具である。たとえば、家計簿では日々の収支は資産の導関数であり、資産は日々の収支を積分したものと考える。また、営業戦略は日々の売り上げの差分を分析する。また、画像処理ではある瞬間の画像と 1 秒後の画像の差分が 0 に近ければ、その間に動いた物が少ないと判断する。さらに、自然界の現象などでは、微分積分法は過去の事実関係から未来の状況を推し量ることに多く利用される。つまり、これにより人類は過去現在に加えて、未来を観る術を得たのである。これが人類の歴史的な思考革命であった。このことから、多くの先進国が高校教育の到達目標に微分積分法を据えている理由が理解できる。

このように、変化の激しい現代社会では変化を捉えることが益々重要視され、微分と差分は今後も活躍する。