series　高校数学こぼれ話　第19話

鶯谷中学・高等学校
数学科部長　渡邉泰治

■フィボナッチ（Fibonacci）数列はなぜ身の回りに頻繁に顔を出すのか

フィボナッチ数列と呼ばれる 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … という数列は、 数列の中で高い人気を誇っている。その理由は、数列が生成される規則の単純さにも関わらず、身の回りの様々な現象、特に生命現象の中に頻繁に登場する不思議な数列だからであろう。ということは、この数列の規則性と自然界のそれがどこかで連動していると考えられる。このことから長年この数列の探究が続けられてきたし、今でも探究されている。

この第19話では、この数列の魅力に迫ろう。

●フィボナッチ数列はいつどのように登場したか

フィボナッチ数列が歴史上最初に登場したのは、1202年に刊行された「算盤の書」の中の有名な「ウサギのつがいの問題」であった。フィボナッチ（Fibonacci, 1170年頃―1250年頃）とはイタリアの数学者の名前であり、この著者である。この名前は本名ではなく通称であり、ボナッチの息子という意味のフィリウス・ボナッチ（filius Bonacci）が短縮されて、フィボナッチと呼ばれるようになったというのが定説である。本名はレオナルド・ダ・ピサである。

「ウサギのつがいの問題」は次のとおりである。

生まれたばかりの1つがいのウサギは2か月目から毎月1つがいのウサギを産むとする。すべてのウサギがこの規則に従い、死ぬことはないとするとき、1つがいのウサギは一年後に何つがいのウサギになるか（図1）。

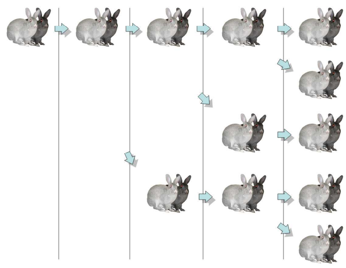

図1：ウサギのつがい問題

これを解決していこう。最初のウサギのつがい数は1である。一か月後のつがい数はやはり1である。二か月後には1つがい産むので、つがい数は2となる。三か月後では、最初のつがいがさらに1つがい産むので、つがい数の合計は3となる。四か月後では、最初のつがいがさらに1つがい産むとともに、二か月後に産まれたつがいが1つがい産むことにより、合計は5つがいとなる。結局一年後には233つがいになっている。このような規則で増えていく数列を、出題者に因んでフィボナッチ数列と呼ぶようになった。

●フィボナッチ数列の基本的な仕組みは何か

まず、1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … における数列の生成規則を考えよう。この各項は一つ手前の項ともう一つ手前の項の和となっている。これを数列の漸化式で表現すると、

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ ,\ a_1=a_2=1 \cdots ①$$

である。上述した「ウサギのつがいの数」は、一か月前のつがい数と二か月前のつがい数の和であり、この生成規則に従っている。

次に、この数列の一般項を求めていこう。① の漸化式の解法は、高校数学では「隣接3項間の漸化式」と呼ばれる難問のひとつであるが、大学入試では頻出問題でもある。まず ① 式を

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \cdots ②$$

の形に変形する。というのは、② 式から数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ が公比 β の等比数列と分かり、解法の糸口となるからである。② 式を $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ と変形して ① 式と比較すると、$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$ を得る。この α, β の値は $t^2-t-1=0$ （特性方程式という）を解くことで求まり、$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ である。α, β の値の取り方は2通りあるから、② 式は $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$,　$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \cdots$ ②’ の2通りできる。これらの各々から等比数列の一般項を組み立てて、$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\,\beta^{n-1}$, $a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\,\alpha^{n-1}$ すなわち

$$a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=\left(a_2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \cdots ③$$

$$a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n=\left(a_2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \cdots ④$$

が導かれる。④−③として a_{n+1} を消去すると、一般項 a_n が次のとおり求まる。

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

自然数からなる数列の一般項に無理数が登場することは興味深い（第18話参照）。

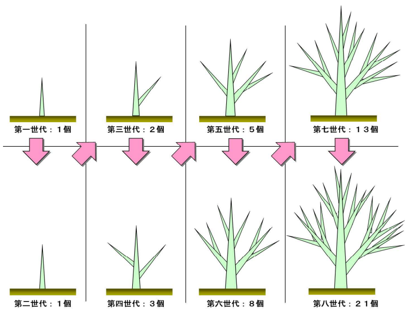

図２：樹木の枝分かれのモデル

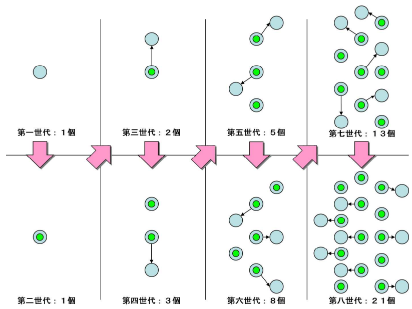

図３：出芽細胞の分裂モデル

●フィボナッチ数列はどんな現象に現れるのか

「各項は一つ手前の項ともう一つ手前の項の和」という生成規則は、生命現象のなかで二世代前からの影響を受ける現象の単純なモデルと考えられる。モデルとは、現象の原理を数理的に簡略化したものである。その具体例をみていこう。

まず最初に、樹木が枝分かれするときの枝の本数を考えてみよう（図２）。最初に種から芽生えた木の幹は１本である（このとき双葉があるかもしれないが、それは枝とは言わないことにする）。さて、幹がある程度太くなると枝を１本出す。このとき幹と枝の合計の本数は２本である。成長に伴ってさらに幹は別の枝を出す。このとき、最初に伸びた枝はまだ細くて枝を出すに至っていないので、本数は３本である。しばらくすると、幹はさらに枝を出すとともに、最初に出た枝も十分太くなり新たに枝を出し、幹と枝の本数の合計は５本となる。このように幹と枝の本数の合計はフィボナッチ数列を形成する。

二つ目の例として、細胞が分裂して増えていく現象でも、似たようなことが起こる。特に出芽細胞では、親細胞は一定時間毎に小細胞を出芽し、小細胞は一定時間経って親細胞となり、しばらくして小細胞を出芽する（図３）。このような場合も細胞の合計数はフィボナッチ数列を形成する。

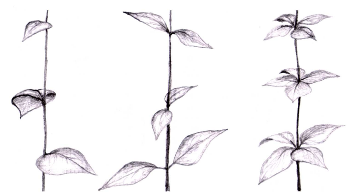

図４：葉序の代表

●螺旋のなかに潜むフィボナッチ数列

植物が茎から葉を出す方向の規則は葉序と呼ばれ、研究がなされてきた。生物形態学での葉の出方の代表は、互生、対生、輪生が挙げられる（図４）。そこでは、葉が効率的に受光できるように、黄金角（第20話）をなす方向に出ると考えられている（図５左）。さらに最新の分子生物学や発生学では、分裂組織と植物ホルモン分布との位置関係から黄金角をなすという研究（近藤 滋著：「波紋と螺旋とフィボナッチ」、秀潤社 参照）もある。

いずれにせよ、茎の周りに葉が規則的に生えるので、それが密集すると螺旋模様ができる（図５右）。その顕著な例として松かさやヒマワリの種の部分にできる螺旋模様は見事である（図６）。 この螺旋には右巻きと左巻きがあり、それらの本数の比がフィボナッチ数列の隣同士の値となることが多い（例外もある）。この松かさでは５：８、ヒマワリでは 55：89 となっている。

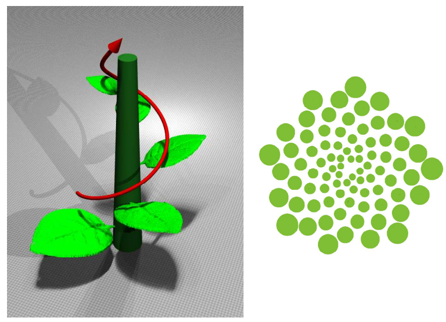

図５：葉序に潜む規則

図６：松かさとヒマワリに現れる左巻き、右巻き螺旋

以上、フィボナッチ数列の人気の秘密を探ってきた。それは、この数列の生成規則が生物界に潜む規則をモデル的に表現していることにあった。

実は、フィボナッチ数列は黄金比とも密接な関係にあり、それが魅力に拍車かけている。第20話では最も美しい比率とされる黄金比について、フィボナッチ数列と関連させて見ていこう。