series 高校数学こぼれ話　第 10 話

鶯谷中学・高等学校
数学科部長　渡邉泰治

■三角形の五心の魅力は何か

多角形のなかで三角形は最も単純な図形であり、あらゆる多角形が三角形に分割できることから図形研究の入り口とみなされ、長年研究し尽くされてきた。特に、三角形を構成する要素である 3 辺の長さと 3 つの角が議論の対象であったが、これに加えて、「特徴的な点」つまり「五心」といわれる重心、垂心、内心、外心、傍心などが議論されてきた。

第 10 話では五心を再確認しながら、その他の「特徴的な点」ついてもみていこう。

●三角形の五心はどのような点か

まず、三角形の五心の定義と作図方法を確認しておこう（図 1）。

① 重心（釣り合う点）　：中線の交点

② 垂心（各頂点から対辺へ下ろした垂線の交点）：定義通り

③ 内心（内接円の中心）：各角の二等分線の交点

④ 外心（外接円の中心）：各辺の垂直二等分線の交点

⑤ 傍心（傍接円の中心）：2 つの外角の二等分線の交点（3 つある）

それぞれの作図方法は、点の性質を理解する上で極めて重要である。

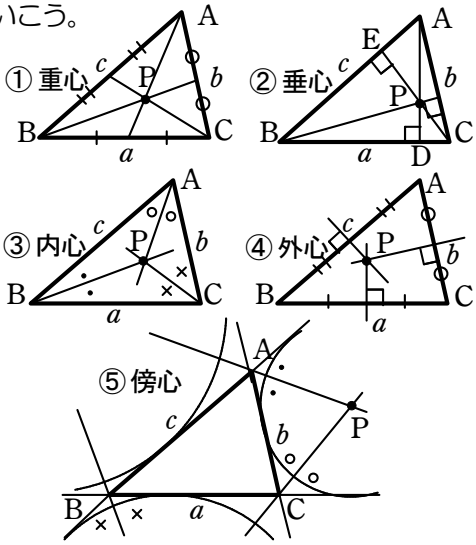

図 1:三角形の 5 心

● 五心をベクトルで表すとどうなるか

五心の幾何学的定義をみてきたが、これらをベクトルで数式として表現してみよう。そのとき次の関係を活用する。

△ABC の内部の点を P とする（図 2）。P と三角形の辺でできる 3 つの三角形の面積比を

△PBC : △PCA : △PAB = $l:m:n$ とするとき（点 P が外部にあるとき面積を負にすればよいが、省略する）、

点 P の位置ベクトルは　$\vec{p}=\dfrac{l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}}{l+m+n}$　である。

【証明】直線 AP と辺 BC の交点を D とする。線分の長さと三角形の面積の関係より、

BD : DC = △PAB : △PCA = $n:m$

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBD}=\triangle\mathrm{PAB}:\frac{n}{m+n}\triangle\mathrm{PBC}=n:\frac{ln}{m+n}=m+n:l$$

$$\text{よって、}\vec{p}=\frac{(m+n)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+l\vec{a}}{l+(m+n)}=\frac{1}{l+m+n}\left((m+n)\frac{m\vec{b}+n\vec{c}}{m+n}+l\vec{a}\right)=\frac{l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}}{l+m+n}$$

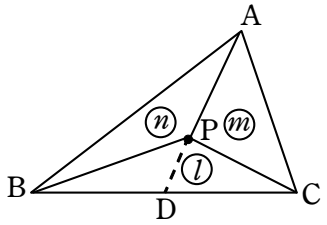

図 2:面積比と位置ベクトル

これにより、五心と辺でできる 3 つの三角形の面積比を図 1 から求めて、五心の位置ベクトルを表す（傍心は省略）。

① 重心：$\triangle\mathrm{PBC}=\triangle\mathrm{PCA}=\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$　よって、$\vec{p}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

② 垂心：$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}=\mathrm{BE}:\mathrm{EA}=a\cos\mathrm{B}:b\cos\mathrm{A}$，$\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\mathrm{CD}:\mathrm{DB}=b\cos\mathrm{C}:c\cos\mathrm{B}$ より、

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\frac{a}{\cos\mathrm{A}}:\frac{b}{\cos\mathrm{B}}:\frac{c}{\cos\mathrm{C}}=\frac{\sin\mathrm{A}}{\cos\mathrm{A}}:\frac{\sin\mathrm{B}}{\cos\mathrm{B}}:\frac{\sin\mathrm{C}}{\cos\mathrm{C}}\quad\text{（正弦定理より）}$$

$$=\tan\mathrm{A}:\tan\mathrm{B}:\tan\mathrm{C}\quad\text{よって、}\vec{p}=\frac{\tan\mathrm{A}\,\vec{a}+\tan\mathrm{B}\,\vec{b}+\tan\mathrm{C}\,\vec{c}}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}$$

③ 内心：3 つの三角形の高さはどれも内接円の半径だから、$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=a:b:c$

$$\text{よって、}\vec{p}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$$

④外心：外接円の半径を R とし、「2 ×円周角＝中心角」の関係を使って、

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}R^2\sin 2\mathrm{A}:\frac{1}{2}R^2\sin 2\mathrm{B}:\frac{1}{2}R^2\sin 2\mathrm{C}=\sin 2\mathrm{A}:\sin 2\mathrm{B}:\sin 2\mathrm{C}$$

よって、$\vec{p}=\dfrac{\sin 2A\,\vec{a}+\sin 2B\,\vec{b}+\sin 2C\,\vec{c}}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$

●重心、外心、垂心にはどんな関係があるか（オイラー線）

三角形の外心 O、重心 G、垂心 H の間に「O, G, H は同一直線上にあり、2 OG=GH 」という関係がある（図 3 上）。この直線は発見者オイラー（Euler, 1707－1783年）因んでオイラー線と呼ばれている。この証明はベクトルを使うと簡便であり、概要は次のとおりである。O から各頂点への位置ベクトルを $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$、外接円の直径をCD とする（図 3 下）。∠CBD＝∠CAD＝90° より、OM∥BD∥AH, DA∥BH, 2OM＝BD＝AH であるから、$\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ を得る。また $\vec{g}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であるから、$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$ が導かれる。

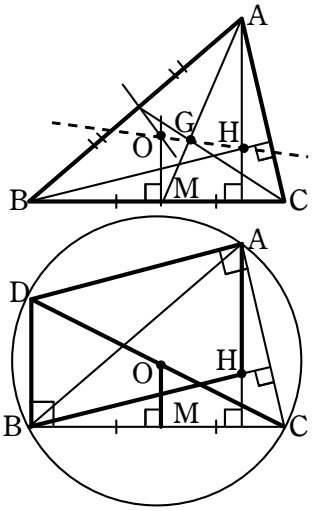

図 3:オイラー線

●重心とはどのような点か

五心のなかで重心は、物体としての物理現象と連動している概念である。このことから、その物体の構造により 3 つの定義が使い分けられる（図 4）。一つ目は、三角形が一様な密度の板であるとする場合（幾何学的重心）、二つ目は、3 つの頂点に同じ重さのおもりがぶら下がっているとする場合（物理的重心）、最後に、3 つの辺が細い金属フレームでできているとする場合（フレーム重心）である。三角形の場合、幾何学的重心と物理的重心は一致するが、四角形以上では一致しないので、注意が必要である。

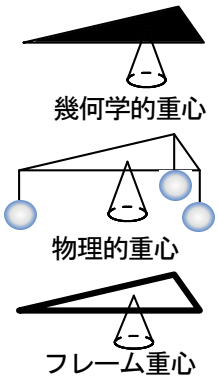

図 4:三種類の重心

●三角形におけるフェルマー点、シュタイナー点はどのような点か

フェルマー（Fermat, 1607－1665年）点とは、△ABC の各辺を一辺とする 3 つの正三角形 BCP, CAQ, ABR を作るとき、直線AP, BQ, CR の交点をいう（図 5）。また、この点は「三角形の 3 つの頂点からの距離の和を最小とする」ことから、この最小問題を提起した数学者に因んでシュタイナー点（J. Steiner, 1796－1863年）とも呼ばれる。

フェルマー点が存在する証明の概要をみよう。△BCP, △CAQ, △ABR の 3 つの外接円が一点 F で交わることを証明すればよい。これは ∠AFB＝∠AFC＝120° から容易である。

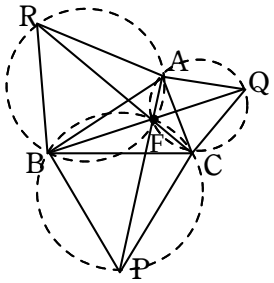

図 5:フェルマー点

また、シュタイナー点であることも示そう。点 A, B, C をそれぞれ通り、AF, BF, CF に垂直な直線 l, m, n を引く。これらが作る △LMN は正三角形となる（図 6）。△LMNの内部の任意の点 G から△LMN の各辺に下ろした垂線の足をそれぞれ I, J, K とすると、G と各足までの長さは直線までの最短距離であるから、GI≦GA, GJ≦GB, GK≦GC である。また、一般に、正三角形の内部の点G は、面積の関係より △LMN＝△LGM＋△MGN＋△NGL を満たすので、GI＋GJ＋GK は G の位置によらず一定である。よって、

AF＋FB＋FB＝GI＋GJ＋GK≦GA＋GB＋GC

つまり、点F において、F と A, B, C との距離の和が最小となる。

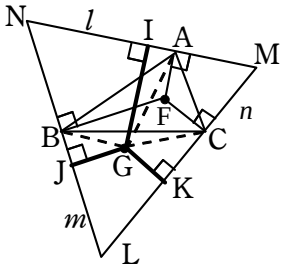

図 6:シュタイナー点

このシュタイナー点は現代のネットワーク論において重要である。たとえば「複数の町に電気を供給する変電所を作るとき、送電効率が最大になるように電線の長さを最小にする場所はどこか」などがあるが、難問でもあり、コンピュータを駆使して近似解を探っている。

以上、三角形に付随する「特徴的な点」をまとめた。そこでは五心を題材に、幾何的な（作図による）手法と数式的な（ベクトルによる）手法で理解を深めた。このような図形と数式の両世界を往来する考え方は、歴史的には人類の視野を広げて思考力を飛躍的に高めてきたし、現在では現代人の必須の能力でもある。また、重心やシュタイナー点を現実の現象に適用し、その有益性もみてきた。このように、最も単純な図形である三角形は多くの魅力に溢れている。