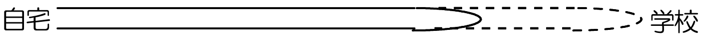
数学サークル series 「数学を楽しもう」no.3　解説編

情報誌　第 6 号 (2013.7)

1　鶯谷高校のヤス君は学校から帰宅するとき、毎日 5 時にお母さんに車で門まで迎えに来てもらってる。ある日、学校が 早く終わったので、歩いて家まで帰ることにし、4 時に学校を出た。しばらく歩いていくとお母さんの車と出会い、そこから車に乗って帰ったら、いつもより 10 分早く家についた。ヤス君がお母さんとで出会ったのは何時何分か。ただし、車に乗り込む時間は無視する。

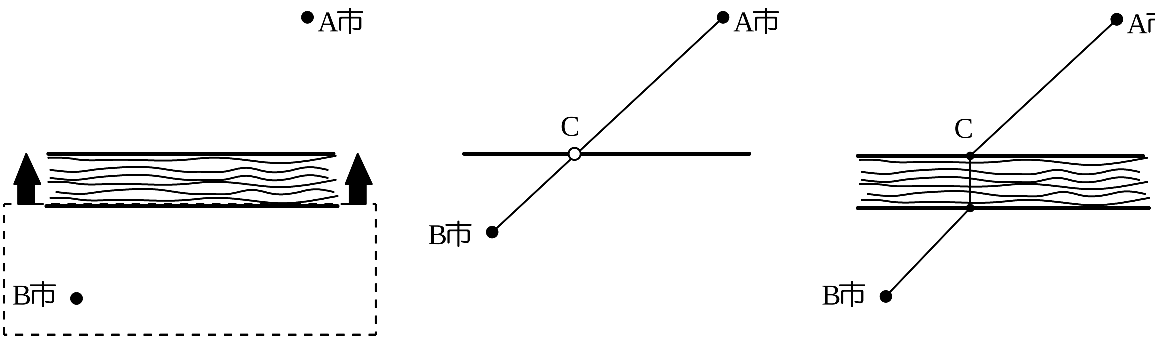
お母さんの行動に着目し、状況を図式化すると、



であり、帰宅したのが 10 分早かったので、往復で 5 分ずつ短縮された。したがって、 4 時 55 分にヤスくんを拾った。

2　図のように、A 市と B 市の間に川がある。新都市計画ができて A 市と B 市を結ぶ最短道路を作ることとなった。川を渡る橋はどこに架ければよいか。だたし、橋は川の堤防に直角に架けなければならない。また、川幅は一様であるとする。

川を渡る部分は A 市、B 市の位置関係とは関係なく川に垂直に架かることから、川を渡る部分を無視する。すなわち、川幅を 0 に縮めて（B市も移動）、A 市と B 市を結ぶ直線で結び、点 C で橋を造ればよい。



3　n を自然数とし、次の分数を考える。

$$\frac{n}{1},\ \frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{3},\ \frac{n+3}{4},\ \frac{n+4}{5},\ \cdots$$

この分数のうち、自然数になるものの個数がちょうど 3 個であるような n はどのような数か。

$$\frac{n}{1},\ \frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{3},\ \frac{n+3}{4},\ \frac{n+4}{5},\ \cdots$$

この数列の第 1 項 $\dfrac{n}{1}$ は自然数であるので、残り 2 個が自然数となればよい。

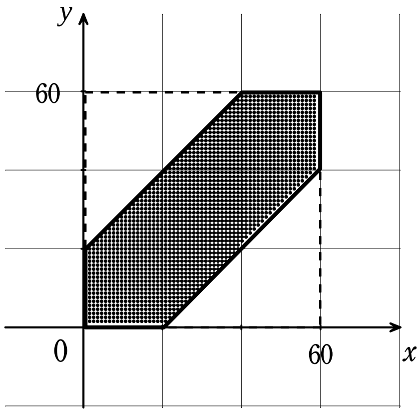
この数列の一般項は $\dfrac{n+k-1}{k}=\dfrac{n-1}{k}+1$ であるから、これが自然数となるには、$n-1$ がすべての自然数 k に対して 2 回のみ約されて $\dfrac{n-1}{k}$ が自然数になればよい。

（これは回転寿司に食べに行った $n-1$ 君が、 好物のネタが 2 皿しかなかった状況に似ている。つまり、$n-1$ 君はどんどん回転してくる自然数 k ($1, 2, 3, 4, \cdots$)というネタをみているが、ほしいネタ(自分の約数)が 2 回しか回ってこなかった、というようなもの）

したがって、ある素数 p に対して、$n-1=p^2$ となればよい。つまり、$n=p^2+1$ である。

4 ゆう君とかおりさんがデートの約束をした。いつもの場所に午後 3 時から 4 時の間に行く。最大 20 分間は待つが、4 時には帰ることにする。このとき、二人が逢える確率を求めよ。

ゆう君とかおりさんがいつもの場所に到着する時刻を（3時 x 分、3時 y 分）とし、xy 座標平面上の点で表すとする。



x, y のとり得る値の範囲は

$0 \leqq x \leqq 60,\ 0 \leqq y \leqq 60$

である。また、二人が逢える条件は

$|x-y| \leqq 20$

である。

この状況を図示すると、右図のようになり、逢える条件を満たす領域は網掛けの図形の範囲である。

したがって、逢える確率は3時から4時までの正方形の面積と網掛けの図形の面積の比を求めればよい。

よって　$\dfrac{5}{9}$

5 (1) 岐阜市の人口を 50 万人とする。岐阜市民の中で、頭髪の本数が同じ人が少なくとも一組いること を証明せよ。ただし、人間一人あたりの頭髪の最大値は 30 万本であるとする。

岐阜市民の 30 万人の頭髪の本数がすべて異なっていたとすると、30 万 1 人目はそれまでの誰かの本数と一致する。したがって、同じ本数の人間が少なくとも一組存在する。

【解説】

異なる n 個に対して、異なる $n+1$ 個が対応するとき、重複が生じる。このような考え方を「鳩の巣原理」という。この名の由来は、例えば５個の鳩の巣に６羽以上の鳩が入れば、どこかの巣には２羽以上入っているという理屈から来ている。

この「鳩の巣原理｝は極めて単純であるが、強力な論理的な考察手段である。(2) がその例である。

(2) 一辺が 2 の正三角形の辺または内部に 5 つの点をとる。このとき、2 点間の距離か 1 以下であるような 2 点が存在することを証明せよ。

右図のように、正三角形を一辺 1 の正三角形によって 4 つの領域 A, B, C, Dに分割する。

鳩の巣原理より、 5 つの点は 4 つの領域のどこかの領域に 2 点入り込む。

その 2 点を P, Q とすると、P, Q は一辺 1 の正三角形の内部または辺上にあるから、PQ の長さは 1 以下になる。よって証明された。